Om

dobbelte bestemte Integraler

ved

Adolph Steen.

Om dobbelte bestemte Integraler.

1. Antages med Udeladelse af de arbitrære Functioner

$$\int F(x,y)\,dx = F_x(x,y),\quad \int F(x,y)\,dy = F_y(x,y),\quad \int\int F(x,y)\,dx\,dy = f(x,y),$$

saa vil man have

$$\int_a^b F(x,y)\,dx = F_x(b,y) - F_x(a,y),\quad \int_{a_1}^{b_1} F(x,y)\,dy = F_y(x,b_1) - F_y(x,a_1)$$

og fölgelig

$$\left.\begin{aligned}\int_{a_1}^{b_1}\int_a^b F(x,y)dy\,dx &= \int_{a_1}^{b_1}\left[F_x(b,y)-F_x(a,y)\right]dy = f(b,b_1)-f(b,a_1)-f(a,b_1)+f(a,a_1)\\ \int_a^b\int_{a_1}^{b_1} F(x,y)dx\,dy &= \int_a^b\left[F_y(x,b_1)-F_y(x,a_1)\right]dx = f(b,b_1)-f(a,b_1)-f(b,a_1)+f(a,a_1)\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

eller

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_a^b F(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b\int_{a_1}^{b_1} F(x,y)\,dx\,dy.\qquad(2)$$

2. Den *Taylorske* Formel kan anvendes til approximert Beregning af det bestemte Integral (2) paa en Maade som er analog med den, hvorpaa *Euler* har beregnet de enkelte bestemte Integraler*).

Man har, idet $f(x,y) = u$, fölgende symbolske Udtryk**)

$$f(x+h,y+k) = u + \frac{1}{1}\left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k\right)^2 + \dots + \frac{1}{[n-1]}\left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k\right)^{n-1} + r_n$$

---

*) *Ramus* Diff. og Int. Regn. p. 67.

**) Sammesteds p. 3.

og

$$\left.\begin{aligned} r_n = &\int_0^h \left[\frac{d.^n f(x+h-z,y)}{dx^n}\frac{z^{n-1}}{[n-1]} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{r=n-2}\frac{d^n.f(x+h-z,y)}{dx^{n-r}dy^r}\frac{z^{n-r-1}}{[n-r-1]}\frac{k^r}{[r]}\right. \\ &\left.\qquad + \frac{1}{2}\int_0^k \frac{d^n.f(x+h-z,y+k-t)}{dx\,dy^{n-1}}\frac{t^{n-2}}{[n-2]}dt\right]dz \\ &+\int_0^k \left[\frac{d^n.f(x,y+k-t)}{dy^n}\frac{t^{n-1}}{[n-1]} + \tfrac{1}{2}\sum_{r=2}^{r=n-1}\frac{d^n.f(x,y+k-t)}{dx^{n-r}dy^r}\frac{h^{n-r}}{[n-r]}\frac{t^{r-1}}{[r-1]}\right. \\ &\left.\qquad + \frac{1}{2}\int_0^h \frac{d^n f(x+h-z,y+k-t)}{dy\,dx^{n-1}}\frac{z^{n-2}}{[n-2]}dz\right]dt \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

hvor

$$[r] = 1.2.3\ldots.r,$$

$$\sum_{r=1}^{r=h}\varphi(r) = \varphi(1)+\varphi(2)+\ldots.+\varphi(h).$$

Formlen (3) angiver et Udtryk for Resten af Rækken, hvis Rigtighed vises ved deelviis Integration. Man har nemlig

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^k \frac{d^n.f(x+h-z,y+k-t)}{dx\,dy^{n-1}}\frac{t^{n-2}}{[n-2]}dt = &\frac{1}{2}\frac{d^n.f(x+h-z,y)}{dx\,dy^{n-1}}\frac{k^{n-1}}{[n-1]} \\ &+\frac{1}{2}\int_0^k \frac{d.^{n+1}f(x+h-z,y+k-t)}{dx\,dy^n}\frac{t^{n-1}}{[n-1]}dt \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^h \frac{d^n.f(x+h-z,y+k-t)}{dy\,dx^{n-1}}\frac{z^{n-2}}{[n-2]}dz = &\frac{1}{2}\frac{d^n.f(x,y+k-t)}{dy\,dx^{n-1}}\frac{h^{n-1}}{[n-1]} \\ &+\frac{1}{2}\int_0^h \frac{d.^{n+1}f(x+h-z,y+k-t)}{dy\,dx^n}\frac{z^{n-1}}{[n-1]}dz. \end{aligned}\right\}$$

Indföres disse transformerede Integraler i (3) og foretages endnu en deelviis Integration, faaes

$$\begin{aligned} r_n = &\frac{d^n u}{dx^n}\frac{h^n}{[n]} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{r=n-2}\frac{d^n u}{dx^{n-r}dy^r}\frac{h^{n-r}}{[n-r]}\frac{k^r}{[r]} + \frac{1}{2}\frac{d^n u}{dx\,dy^{n-1}}\frac{h}{1}\frac{k^{n-1}}{[n-1]} \\ &+\frac{d^n u}{dy^n}\frac{k^n}{[n]} + \frac{1}{2}\sum_{r=2}^{r=n-1}\frac{d^n u}{dx^{n-r}dy^r}\frac{h^{n-r}}{[n-r]}\frac{k^r}{[r]} + \frac{1}{2}\frac{d^n u}{dy\,dx^{n-1}}\frac{h^{n-1}}{[n-1]}\frac{k}{1} + r_{n+1} \end{aligned}$$

eller ifölge den symbolske Betegnelse

$$r_n = \frac{1}{[n]}\left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k\right)^n + r_{n+1}.$$

Med Hensyn til de i dette Beviis foretagne Differentiationer maa erindres, at

$$\frac{d.F(x+h-z,y)}{dz} = -\frac{d.F(x+h-z,y)}{dx}$$

$$\frac{d.\,F(x,\,y+k-t)}{dt}=-\frac{d.\,F(x,\,y+k-t)}{dy}.$$

3. Sættes nu $h=b-a,\ k=b_1-a_1,\ x=a,\ y=a_1$, saa vil

$$f(b,b_1)-f(b,a_1)-f(a,b_1)+f(a,a_1)=f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y)$$

eller, idet

$$f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y)=\frac{d^2u}{dx\,dy}hk+\frac{1}{[3]}\left(3\frac{d^3u}{dx^2dy}h^2k+3\frac{d^3u}{dx\,dy^2}hk^2\right)$$

$$+\frac{1}{[4]}\left(4\frac{d^4u}{dx^3dy}h^3k+6\frac{d^2u}{dx^2dy^2}h^2k^2+4\frac{d^4u}{dx\,dy^3}hk^3\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{[n-1]}\sum_{r=1}^{r=n-2}\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-r)}{1.2\ldots.r}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-r-1}dy^r}h^{n-r-1}k^r+\&c.,$$

bliver

$$\left.\begin{aligned}&\int_{a_1}^{b_1}\int_a^b F(x,y)dy\,dx=F(a,a_1)(b-a)(b_1-a_1)+\\ &\frac{1}{[3]}\left(3\left[\frac{d.F(x,y)}{dx}\right](b-a)^2(b_1-a_1)+3\left[\frac{d.F(x,y)}{dy}\right](b-a)(b_1-a_1)^2\right)\ldots\ldots\ldots\\ &+\frac{1}{[n-1]}\sum_{r=1}^{r=n-2}\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-r)}{1.2\ldots.r}\left[\frac{d.^{n-3}F(x,y)}{dx^{n-r-2}dy^{r-1}}\right](b-a)^{n-r-1}(b_1-a_1)^r+r_n'\end{aligned}\right\}, \quad (4)$$

hvor $\left[\frac{d.^{n-3}F(x,y)}{dx^{n-r-2}dy^{r-1}}\right]$ betyder den Værdi som faaes, naar man efter Differentiationen sætter $x=a,\ y=a_1$, og r_n' er det Udtryk som erholdes for r_n af (3), naar man gjör $z=b-v$, $t=b_1-w$ og igjen forandrer v til x, w til y, udelader de förste Led som tilhöre Udviklingen for $f(x+h,y)$ og $f(x,y+k)$, samt indförer $F(x,y)$ for $\frac{d^2f(x,y).}{dx\,dy}$ Man faaer da

$$r_n'=\int_a^b\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{r=n-2}\frac{d.^{n-2}F(x,y)}{dx^{n-r-1}dy^{r-1}}\frac{(b-x)^{n-r-1}}{[n-r-1]}\frac{(b_1-a_1)^r}{[r]}+\frac{1}{2}\int_{a_1}^{b_1}\frac{d.^{n-2}F(x,y)}{dy^{n-2}}\frac{(b_1-y)^{n-2}}{[n-2]}dy\right]dx$$

$$+\int_{a_1}^{b_1}\left[\frac{1}{2}\sum_{r=2}^{r=n-1}\frac{d.^{n-2}F(x,y)}{dx^{n-r-1}dy^{r-1}}\frac{(b-a)^{n-r}}{[n-r]}\frac{(b_1-y)^{r-1}}{[r-1]}+\frac{1}{2}\int_a^b\frac{d.^{n-2}F(x,y)}{dx^{n-2}}\frac{(b-x)^{n-2}}{[n-2]}dx\right]dy.$$

Man kunde yderligere forkorte Betegnelsen ved at sætte

$$\left[\frac{d.\,F(x,y)}{dx}\right]=F_x^1(a,a_1),\ \left[\frac{d.^{m+n}F(x,y)}{dx^m\,dy^n}\right]=F_{x,y}^{m,\,n}(a,a_1),\ \left[\frac{d.\,F(x,y)}{dy}\right]=F_y^1(a,a_1),$$

saa at derved (4) forandres til

$$\left.\begin{aligned}&\int_{a_1}^{b_1}\int_a^b F(x,y)\,dy\,dx=F(a,a_1)(b-a)(b_1-a_1)+\\ &\frac{1}{[3]}\left[3F_x^1(a,a_1)(b-a)^2(b_1-a_1)+3F_y^1(a,a_1)(b-a)(b_1-a_1)^2\right]+\ \ldots\ldots\\ &+\frac{1}{[n-1]}\sum_{r=1}^{r=n-2}\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-r)}{1.2\ldots r}F_{x,y}^{n-r-2,\,r-1}(a,a_1)(b-a)^{n-r-1}(b_1-a_1)^r+r'_n\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Da man nu ifölge bekjendte Principer har

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_a^b F(x,y)dy\,dx = -\int_{a_1}^{b_1}\int_b^a F(x,y)dy\,dx = -\int_{b_1}^{a_1}\int_a^b F(x,y)dy\,dx = \int_{b_1}^{a_1}\int_b^a F(x,y)\,dy\,dx,$$

faaes ved Anvendelse af (5) paa de tre sidste Integraler fölgende nye Udtryk for det förste

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{a_1}^{b_1}\int_a^b F(x,y)dy\,dx = F(b,a_1)(b-a)(b_1-a_1)+\\
&\frac{1}{[3]}\Big[-3F_x^1(b,a_1)(b-a)^2(b_1-a_1)+3F_y^1(b,a_1)(b-a)(b_1-a_1)^2\Big]+\dots\dots\dots\dots\\
&\quad+\frac{1}{[n-1]}\sum_{r=1}^{r=n-2}(-1)^{n-r}\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-r)}{1.2\dots r}F_{x,y}^{n-r-2,r-1}(b,a_1)(b-a)^{n-r-1}(b_1-a_1)^r+r'_n\\
&r'_n=\int_a^b\Big[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{r=n-2}\frac{d.^{n-2}F(x,y)}{dx^{n-r-1}dy^{r-1}}\frac{(a-x)^{n-r-1}}{[n-r-1]}\frac{(b_1-a_1)^r}{[r]}+\frac{1}{2}\int_{a_1}^{b_1}\frac{d^{n-2}F(x,y)}{dy^{n-2}}\frac{(b_1-y)^{n-2}}{[n-2]}dy\Big]dx\\
&-\int_{a_1}^{b_1}\Big[\frac{1}{2}\sum_{r=2}^{r=n-1}(-1)^{n-r}\frac{d.^{n-2}F(x,y)}{dx^{n-r-1}dy^{r-1}}\frac{(b-a)^{n-r}}{[n-r]}\frac{(b_1-y)^{r-1}}{[r-1]}-\frac{1}{2}\int_a^b\frac{d^{n-2}F(x,y)}{dx^{n-2}}\frac{(a-x)^{n-2}}{[n-2]}dx\Big]dy
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{a_1}^{b_1}\int_a^b F(x,y)\,dy\,dx = F(a,b_1)(b-a)(b_1-a_1)+\\
&\frac{1}{[3]}\Big[3F_x^1(a,b_1)(b-a)^2(b_1-a_1)-3F_y^1(a,b_1)(b-a)(b_1-a_1)^2\Big]\dots\dots\dots\dots\\
&+\frac{1}{[n-1]}\sum_{r=1}^{r=n-2}(-1)^{r-1}\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-r)}{1.2\dots r}F_{x,y}^{n-r-2,r-1}(a,b_1)(b-a)^{n-r-1}(b_1-a_1)^r+r'_n\\
&r'_n=-\int_a^b\Big[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{r=n-2}(-1)^r\frac{d.^{n-2}F(x,y)}{dx^{n-r-1}dy^{r-1}}\frac{(b-x)^{n-r-1}}{[n-r-1]}\frac{(b_1-a_1)^r}{[r]}-\frac{1}{2}\int_{a_1}^{b_1}\frac{d.^{n-2}F(x,y)}{dy^{n-2}}\frac{(a_1-y)^{n-2}}{[n-2]}dy\Big]dx\\
&+\int_{a_1}^{b_1}\Big[\frac{1}{2}\sum_{r=2}^{r=n-1}\frac{d.^{n-2}F(x,y)}{dx^{n-r-1}dy^{r-1}}\frac{(b-a)^{n-r}}{[n-r]}\frac{(a_1-y)^{r-1}}{[r-1]}+\frac{1}{2}\int_a^b\frac{d.^{n-2}F(x,y)}{dx^{n-2}}\frac{(b-x)^{n-2}}{[n-2]}dx\Big]dy
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{a_1}^{b_1}\int_a^b F(x,y)\,dy\,dx = F(b,b_1)(b-a)(b_1-a_1)-\\
&\frac{1}{[3]}\Big[3F_x^1(b,b_1)(b-a)^2(b_1-a_1)+3F_y^1(b,b_1)(b-a)(b_1-a_1)^2\Big]+\dots\dots\dots\dots\\
&+(-1)^{n-1}\frac{1}{[n-1]}\sum_{r=1}^{r=n-2}\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-r)}{1.2\dots r}F_{x,y}^{n-r-2,r}(b,b_1)(b-a)^{n-r-1}(b_1-a_1)^r+r'_n\\
&r'_n=-\int_a^b\Big[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{r=n-2}(-1)^r\frac{d.^{n-2}F(x,y)}{dx^{n-r-1}dy^{r-1}}\frac{(a-x)^{n-r-1}}{[n-r-1]}\frac{(b_1-a_1)^r}{[r]}-\frac{1}{2}\int_{a_1}^{b_1}\frac{d.^{n-2}F(x,y)}{dy^{n-2}}\frac{(a_1-y)^{n-2}}{[n-2]}dy\Big]dx\\
&-\int_{a_1}^{b_1}\Big[\frac{1}{2}\sum_{r=2}^{r=n-1}(-1)^{n-r}\frac{d.^{n-r}F(x,y)}{dx^{n-r-1}dy^{r-1}}\frac{(b-a)^{n-r}}{[n-r]}\frac{(a_1-y)^{r-1}}{[r-1]}-\frac{1}{2}\int_a^b\frac{d.^{n-2}F(x,y)}{dx^{n-2}}\frac{(a-x)^{n-2}}{[n-2]}dx\Big]dy
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

Man erholder endnu andre Rækker ved at multiplicere enten (6) og (7) eller (5) og (8) med 2, addere dem til de to andre og dividere Summen med 6, samt ved ligefrem at dividere Summen af (5)—(8) med 4, nemlig

$$
\left.\begin{aligned}
&\int_{a_1}^{b_1}\int_a^b F(x,y)\,dy\,dx = \frac{1}{6}(b-a)(b_1-a_1)\left[F(a,a_1)+2F(b,a_1)+2F(a,b_1)+F(b,b_1)\right]+ \\
&\quad \cdots\cdots \frac{1}{6}\frac{1}{[n-1]}\sum_{r=1}^{r=n-2}\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-r)}{1.2\dots.r}(b-a)^{n-r-1}(b_1-a_1)^r\Big[F_{x,y}^{n-r-2,r-1}(a,a_1) \\
&+(-1)^{n-r}2F_{x,y}^{n-r-2,r-1}(b,a_1)+(-1)^{r-1}2F_{x,y}^{n-r-2,r-1}(a,b_1)+(-1)^{n-1}F_{x,y}^{n-r-2,r-1}(b,b_1)\Big]+R_n \\
&R_n=\frac{1}{6}\int_a^b\Bigg[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{r=n-2}\frac{d.^{n-2}F(x,y)}{dx^{n-r-1}dy^{r-1}}\,\frac{[2-(-1)^r]\left[(a-x)^{n-r-1}-(-1)^r(b-x)^{n-r-1}\right]}{[n-r-1]}\,\frac{(b_1-a_1)^r}{[r]} \\
&\qquad\qquad+\frac{1}{2}\int_{a_1}^{b_1}\frac{d.^{n-2}F(x,y)}{dy^{n-2}}\,\frac{3\left[(b_1-y)^{n-2}+(a_1-y)^{n-2}\right]}{[n-2]}\,dy\Bigg]\,dx \\
&+\frac{1}{6}\int_{a_1}^{b_1}\Bigg[\frac{1}{2}\sum_{r=2}^{r=n-1}\frac{d.^{n-2}F(x,y)}{dx^{n-r-1}dy^{r-1}}\,\frac{[2-(-1)^{n-r}]\left[(a_1-y)^{r-1}-(-1)^{n-r}(b_1-y)^{r-1}\right]}{[r-1]}\,\frac{(b-a)^{n-r}}{[n-r]} \\
&\qquad\qquad+\frac{1}{2}\int_a^b\frac{d.^{n-2}F(x,y)}{dx^{n-2}}\,\frac{3\left[(b-x)^{n-2}+(a-x)^{n-2}\right]}{[n-2]}\,dx\Bigg]\,dy
\end{aligned}\right\}\tag{9}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\int_{a_1}^{b}\int_a^b F(x,y)\,dy\,dx = \frac{1}{6}(b-a)(b_1-a_1)\left[2F(a,a_1)+F(b,a_1)+F(a,b_1)+2F(b,b_1)\right]+ \\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad +\frac{1}{6}\frac{1}{[n-1]}\sum_{r=1}^{r=n-2}\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-r)}{1.2\dots r}(b-a)^{n-r-1}(b_1-a_1)^r\Big[2F_{x,y}^{n-r-2,r-1}(a,a_1) \\
&+(-1)^{n-r}F_{x,y}^{n-r-2,r-1}(b,a_1)+(-1)^{r-1}F_{x,y}^{n-r-2,r-1}(a,b_1)+(-1)^{n-1}2F_{x,y}^{n-r-2,r-1}(b,b_1)\Big]+R_n \\
&R_n=\frac{1}{6}\int_a^b\Bigg[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{r=n-2}\frac{d.^{n-2}F(x,y)}{dx^{n-r-1}dy^{r-1}}\,\frac{[2-(-1)^r]\left[(b-x)^{n-r-1}-(-1)^r(a-x)^{n-r-1}\right]}{[n-r-1]}\,\frac{(b_1-a_1)^r}{[r]} \\
&\qquad\qquad+\frac{1}{2}\int_{a_1}^{b_1}\frac{d.^{n-2}F(x,y)}{dy^{n-2}}\,\frac{3\left[(b_1-y)^{n-2}+(a_1-y)^{n-2}\right]}{[n-2]}\,dy\Bigg]\,dx \\
&+\frac{1}{6}\int_{a_1}^{b_1}\Bigg[\frac{1}{2}\sum_{r=2}^{r=n-1}\frac{d.^{n-2}F(x,y)}{dx^{n-r-1}dy^{r-1}}\,\frac{[2-(-1)^{n-r}]\left[(b_1-y)^{r-1}-(-1)^{n-r}(a_1-y)^{r-1}\right]}{[r-1]}\,\frac{(b-a)^{n-r}}{[n-r]} \\
&\qquad\qquad+\frac{1}{2}\int_a^b\frac{d.^{n-2}F(x,y)}{dx^{n-2}}\,\frac{3\left[(b-x)^{n-2}+(a-x)^{n-2}\right]}{[n-2]}\,dx\Bigg]\,dy
\end{aligned}\right\}\tag{10}
$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_a^b\int_{a_1}^{b_1}F(x,y)dy\,dx=\frac{1}{4}(b-a)(b_1-a_1)[F(a,a_1)+(-1)^{n-r}F(b,a_1)+(-1)^{r-1}F(a,b_1)+(-1)^{n-1}F(b,b_1)]+\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad+\frac{1}{4}\frac{1}{[n-1]}\sum_{r=1}^{r=n-2}\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-r)}{1.2\ldots.r}(b-a)^{n-r-1}(b_1-a_1)^r\\
&\Big[F_{x_1y}^{n-r-2,\,r-1}(a,a_1)+(-1)^{n-r}F_{x,y}^{n-r-2,\,r-1}(b,a_1)+(-1)^{r-1}F_{x,y}^{n-r-2,\,r-1}(a,b_1)+(-1)^{n-1}F_{x,y}^{n-r-2,r-1}(b,b_1)\Big]+R_n\\
&R_n=\frac{1}{4}\int_a^b\Big[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{r=n-2}\frac{d.^{n-2}F(x,y)}{dx^{n-r-1}dy^{r-1}}\,\frac{[1-(-1)^r]\,[(b-x)^{n-r-1}+(a-x)^{n-r-1}]}{[n-r-1]}\,\frac{(b_1-a_1)^r}{[r]}\\
&\qquad+\frac{1}{2}\int_{a_1}^{b_1}\frac{d.^{n-2}F(x,y)}{dy^{n-2}}\,\frac{2[(b_1-y)^{n-2}+(a_1-y)^{n-2}]}{[n-2]}\,dy\Big]\,dx\\
&\qquad+\frac{1}{4}\int_{a_1}^{b_1}\Big[\frac{1}{2}\sum_{r=2}^{r=n-1}\frac{d.^{n-2}F(x,y)}{dx^{n-r-1}dy^{r-1}}\,\frac{[1-(-1)^{n-r}][(b_1-y)^{r-1}+(a_1-y)^{r-1}]}{[r-1]}\,\frac{(b-a)^{n-r}}{[n-r]}\\
&\qquad+\frac{1}{2}\int_a^b\frac{d.^{n-2}F(x,y)}{dx^{n-2}}\,\frac{2[(b-x)^{n-2}+(a-x)^{n-2}]}{[n-2]}\,dx\Big]\,dy
\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

Naar vi dernæst antage $b-a=n\omega$, $b_1-a_1=n\omega_1$, vil Integralet (2) udtrykkes ved

$$\int_{a_1}^{a_1+n\omega_1}\int_a^{a+n\omega}F(x,y)\,dy\,dx=\sum_{r_1=o}^{r_1=n-1}\int_{a_1+r_1\omega_1}^{a_1+(r_1+1)\omega_1}dy\sum_{r=o}^{r=n-1}\int_{a+r\omega}^{a+(r+1)\omega}F(x,y)\,dx\qquad(12)$$

Man faaer altsaa det dobbelte Integral (2) deelt i n^2 andre, hvor Differenserne mellem de höjere og lavere Grændser for x og y ere constante nemlig respective ω og ω_1. Antages disse Större1ser ikke at falde udenfor de Grændser som gjöre Rækkerne (5)—(8) convergente, vil man erholde approximerte Udtryk for (2), af hvilke de fölgende Formler ikkun indeholde förste Led.

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{a_1}^{b_1}\int_a^b F(x,y)\,dy\,dx=\omega\omega_1\sum_{r_1=o}^{r_1=n-1}\sum_{r=o}^{r=n-1}F(a+r\omega,\,a_1+r_1\omega_1)+\ \&c.\\
&=\omega\omega_1\Big[F(a,a_1)+\sum_{r=1}^{r=n-1}F(a+r\omega,a_1)+\sum_{r_1=1}^{r_1=n-1}F(a,a_1+r_1\omega_1)+\sum_{r_1=1}^{r_1=n-1}\sum_{r=1}^{r=n-1}F(a+r\omega,\,a_1+r_1\omega)\Big]+\&c.
\end{aligned}\right\}\quad(5')$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{a_1}^{b_1}\int_a^b F(x,y)\,dy\,dx=\omega\omega_1\sum_{r_1=o}^{r_1=n-1}\sum_{r=1}^{r=n}F(a+r\omega,\,a_1+r_1\omega_1)+\&c.\\
&=\omega\omega_1\Big[\sum_{r=1}^{r=n-1}F(a+r\omega,a_1)+F(b,a_1)+\sum_{r_1=1}^{r_1=n-1}\sum_{r=1}^{r=n-1}F(a+r\omega,\,a_1+r_1\omega_1)+\sum_{r_1=1}^{r_1=n-1}F(b,a_1+r_1\omega_1)\Big]+\ \&c.
\end{aligned}\right\}\quad(6')$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{a_1}^{b_1}\int_a^b F(x,y)\,dy\,dx=\omega\omega_1\sum_{r_1=1}^{r_1=n}\sum_{r=o}^{r=n-1}F(a+r\omega,\,a_1+r_1\omega_1)+\&c.\\
&=\omega\omega_1\Big[\sum_{r_1=1}^{r_1=n-1}F(a,a_1+r_1\omega_1)+\sum_{r_1=1}^{r_1=n-1}\sum_{r=1}^{r=n-1}F(a+r\omega,\,a_1+r_1\omega_1)+F(a,b_1)+\sum_{r=1}^{r=n-1}F(a+r\omega,\,b_1)\Big]+\&c.
\end{aligned}\right\}\quad(7')$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_{a_1}^{b_1}\int_a^b F(x, y)\,dy\,dx = \omega\omega_1 \sum_{r_1=1}^{r_1=n}\sum_{r=1}^{r=n} F(a+r\omega,\ a_1+r_1\omega_1) + \&c.\\ &= \omega\omega_1\left[\sum_{r_1=1}^{r_1=n-1}\sum_{r=1}^{r=n-1} F(a+r\omega, a_1+r, \omega_1) + \sum_{r_1=1}^{r_1=n-1} F(b, a_1+r_1\omega_1) + \sum_{r=1}^{r=n-1} F(a+r\omega, b_1) + F(b, b_1)\right] + \&c.\end{aligned}\right\} \quad (8')$$

Paa lignende Maade kunde Formlerne (9)—(11) transformeres, men man kan lettere behandle (5′)—(8′) paa samme Maade som forhen (5)—(8) for at finde (9′)—(11′). Man faaer da, idet man tillige for Kortheds Skyld sætter F istedenfor $F(a+r\omega, a_1+r_1\omega_1)$,

$$\left.\begin{aligned}&\int_{a_1}^{b_1}\int_a^b F(x, y)\,dy\,dx = \frac{F(a,a_1)+2F(b,a_1)+2F(a,b_1)+F(b,b_1)}{6} +\\ &\omega\omega_1\left[\sum_{r_1=1}^{r_1=n-1}\sum_{r=1}^{r=n-1} F + \tfrac{1}{2}\sum_{r=1}^{r=n-1}\big(F(a+r\omega,a_1)+F(a+r\omega,b_1)\big) + \tfrac{1}{2}\sum_{r_1=1}^{r_1=n-1}\big(F(a,a_1+r_1\omega_1)+F(b,a_1+r_1\omega_1)\big)\right] + \&c.\end{aligned}\right\} \quad (9')$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_{a_1}^{b_1}\int_a^b F(x,y)\,dy\,dx = \frac{2F(a,a_1)+F(b,a_1)+F(a,b_1)+2F(b,b_1)}{6} +\\ &\omega\omega_1\left[\sum_{r_1=1}^{r_1=n-1}\sum_{r=1}^{r=n-1} F + \tfrac{1}{2}\sum_{r=1}^{r=n-1}\big(F(a+r\omega,a_1)+F(a+r\omega,b_1)\big) + \tfrac{1}{2}\sum_{r_1=1}^{r_1=n-1}\big(F(a,a_1+r_1\omega_1)+F(b,a_1+r_1\omega_1)\big)\right] + \&c.\end{aligned}\right\} \quad (10')$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_{a_1}^{b_1}\int_a^b F(x_1 y)\,dy\,dx = \frac{F(a,a_1)+F(b,a_1)+F(a,b_1)+F(b,b_1)}{4} +\\ &\omega\omega_1\left[\sum_{r_1=1}^{r_1=n-1}\sum_{r=1}^{r=n-1} F + \tfrac{1}{2}\sum_{r=1}^{r=n-1}\big(F(a+r\omega,a_1)+F(a+r\omega,b_1)\big) + \tfrac{1}{2}\sum_{r_1=1}^{r_1=n-1}\big(F(a,a_1+r_1\omega_1)+F(b,a_1+r_1\omega_1)\big)\right] + \&c.\end{aligned}\right\} \quad (11')$$

Anm. Ifölge Geometrien har man Störrelsen af det Volumen der indesluttes af en Overflade, hvis Ligning i retvinklede Coordinater er $z=F(x,y)$, af Planet xy og fire Planer lodrette paa xy, nemlig $x=a$, $x=b$, $y=a_1$, $y=b_1$, udtrykt ved (2), naar blot $F(x,y)$ ikke er discontinuert eller uendelig imellem de angivne Grændser for x og y. Man kan dele dette Volumens rectangulære Grundflade i n^2 Rectangler, hver liig $\omega\omega_1$, og ved lodrette Planer gjennem Grundfladens Delingslinier det hele Volumen i n^2 Dele, hver udtrykt ved sit Led i (12). Planernes Skæringslinier ville være Ordinater til Overfladen $z=F(x,y)$, $(n+1)^2$ i Antal. Lægges da nye Planer igjennem disses Endepuncter parallele med xy, saa vil hver af disse ved Skæring med de tilstödende lodrette Planer danne et ret Parallelipedum, saa at der opstaae 4 rette Parallelepipeder paa hver af de smaae Grundflader $\omega\omega_1$. Man faaer altsaa 4 Rækker af n^2 Parallelepipeder, hvis Höjder ville være

i den ene Række Leddene i Summen . . . $\displaystyle\sum_{r_1=o}^{r_1=n-1}\sum_{r=o}^{r=n-1} F(a+r\omega,\ a_1+r_1\omega_1)$,

i den anden — — — . . . $\displaystyle\sum_{r_1=o}^{r_1=n-1}\sum_{r=1}^{r=n} F(a+r\omega,\ a_1+r_1\omega_1)$,

i den tredie — — — . . . $\displaystyle\sum_{r_1=1}^{r_1=n-1}\sum_{r=o}^{r=n} F(a+r\omega,\ a_1+r_1\omega_1)$,

i den fjerde — — — . . . $\displaystyle\sum_{r_1=1}^{r_1=n}\sum_{r=1}^{r=n} F(a+r\omega,\ a_1+r_1\omega_1)$, altsaa netop Factorerne til $\omega\omega_1$ i Rækkerne (5')—(8'), der altsaa komme til at angive approximerte Værdier af hele det nævnte Volumen. — Hvis man derimod havde lagt Planer igjennem hver 3 Endepuncter af de hinanden nærmest liggende af de $(n+1)^2$ Ordinater, vilde der dannes 2 Rækker af n^2 firsidede Legemer, hvis överste Begrændsning var 2 sammenstödende Trekanter. Hver af disse Legemer beregnes som en Sum af 2 skjævt afskaarne tresidede Prismer og vil altsaa kunne udtrykkes

$$\text{i förste Række ved } \frac{1}{6}\,\omega\omega_1\,(z_1+2z_2+2z_3+z_4)$$

$$\text{i anden Række ved } \frac{1}{6}\,\omega\omega_1\,(2z_1+z_2+z_3+2z_4),$$

idet z_1, z_2, z_3, z_4 ere de 4 begrændsende Kanter. Summen af dem alle vil netop være de förste Led i Rækkerne (9') og (10'), thi de Ordinater der ere Led i

$$\sum_{r_1=1}^{r_1=n-1}\ \sum_{r=1}^{r=n-1} F(a+r\omega,\ a_1+r_1\,\omega_1)$$

ville være Kanter i 4 saadanne firsidede Volumina og saaledes faae til Coefficient $1+2+2+1$, de i

$$\sum_{r=1}^{r=n-1} F(a+r\omega, a_1),\ \sum_{r=1}^{r=n-1} F(a+r\omega, b_1),\ \sum_{r_1=1}^{r_1=n-1} F(a, a_1+r_1\,\omega_1),\ \sum_{r_1=1}^{r_1=n-1} F(b, a_1+r_1\,\omega_1)$$

ligge blot i 2 og faae til Coefficient $1+2$, og desuden forekomme $F(b,a_1)$ og $F(a,b_1)$ hver 2 Gange i förste, 1 Gang i sidste Række, medens $F(a,a_1)$ og $F(b,b_1)$ omvendt forekomme 1 Gang i förste, 2 Gange i sidste Række. (9') og (10') ere altsaa nye approximerte Værdier for Volumen. — Forbinder man endelig hver 2 Endepuncter af de hinanden nærmest liggende af de $(n+1)^2$ Ordinater med rette Linier, ville hver 4 saadanne Forbindelseslinier af de 4 hinanden nærmest liggende Ordinater danne en vindskjæv Firkant. Tænkes dernæst en ret Linie at bevæge sig parallel med det ene System lodrette Planer og i bestandig Beröring med 2 ligefor hinanden liggende Sider i hver vindskjæv Firkant, opstaae n^2 Volumina, oventil begrændsede af en Deel af en hyperbolsk Paraboloide, hvis Ligning er $z=\frac{xy}{c}$. Hvert af disse er udtrykt i Formlen

$$\tfrac{1}{4}\,\omega\omega_1\,(z_1+z_2+z_3+z_4)\,^{*)},$$

saa at hele Summen vil udgjöre förste Led i (11'), idet Ordinaterne i

$$\sum_{r_1=1}^{r_1=n-1}\ \sum_{r=1}^{r=n-1} F(a+r\omega,\ a_1+r_1\,\omega_1)$$

ville forekomme som Kanter i 4 Legemer, Ordinaterne i

*) *Moigno* leçons sur le calc. diff. et int., redigées principalement d'après les méthodes de Mr. Cauchy t. II. leç. 15.

$\sum_{r=1}^{r=n-1} F(a+r\omega, a_1)$, $\sum_{r=1}^{r=n-1} F(a+r\omega, b_1)$, $\sum_{r_1=1}^{r_1=n-1} F(a, a_1+r_1\omega_1)$, $\sum_{r_1=1}^{r_1=n-1} F(b, a_1+r_1\omega_1)$

ikkun i 2, og $F(a,a_1)$, $F(b,a_1)$, $F(a,b_1)$, $F(a_1,b_1)$ blot i 1. Altsaa giver (11′) atter et approximeert Udtryk for hele Volumen.

4. Ved Rækkerne i 3 blive fölgende specielle Tilfælde at mærke

1⁰. Man kan have $F(a,a_1)=\infty$, saa at (5) og (5′) ophöre at gjælde, idet ikke alene Coefficienten til $(b-a)(b_1-a_1)$, men ogsaa alle de fölgende Coefficienter til Potenser af $(b-a)(b_1-a_1)$ blive uendelige. Taylors Række ophörer at være gyldig fra det Led som indeholder $(b-a)(b_1-a_1)$.

2⁰. $F(b,a_1)=\infty$ medförer Ugyldigheden af (6) og (6′),

3⁰. $F(a,b_1)=\infty$ — — (7) og (7′),

4⁰. $F(b,b_1)=\infty$ — — (8) og (8′) af lignende Grunde.

5⁰. Hvis samtidig flere af Tilfældene 1⁰—4⁰ indtræde, ville ligeledes samtidig flere Par af Formlerne (5)—(8) og (5′)—(8′) ophöre at gjælde.

6⁰. Er $F^{m,n}_{x,y}(x,y)$ uendelig for hvilkensomhelst af de angivne Grændseværdier for x og y, ville nogle Rækker kun blive gyldige til de Led, som indeholde denne Differentialcoefficient.

7⁰. Hvis $F^{m,n}_{x,y}(c,c_1)$, c og c_1 beliggende respective imellem a og b, a_1 og b_1, maa alt det Foregaaende erindres med Hensyn til (5′)—(8′), forsaavidt c og c_1 netop ere Grændser for nogle af Integralerne i (12), nemlig höjere Grændser i een Række, lavere i en anden.

Formlerne i (9)—(11) og (9′)—(11′) maae som dannede af (5)—(8) og (5′)—(8′) være de samme Indskrænkninger underkastede som disse.

5. Sætter man $n=\infty$, $\omega=dx$, $\omega_1=dy$ og antager $F(x,y)$ endelig i hele Udstrækningen fra $x=a$ til $x=b$ og fra $y=a_1$ til $y=b_1$, saa ville Rækkerne (5′)—(11′) reduceres til deres förste Led, indeholdende alene förste Potens af ω og ω_1, eller af dx og dy, og man seer, at *det bestemte Integral er det samme som Summen af alle Værdier af Differentialet imellem Integrationsgrændserne.* Det samme udledes af (12), da man ifölge (1) har

$$\int_{a_1+r_1dy}^{a_1+(r_1+1)dy}\int_{a+rdx}^{a+(r+1)dx} F(x,y)\,dy\,dx = f(a+rdx+dx,\ a_1+r_1dy+dy) - f(a+rdx+dx, a_1+r_1dy)$$
$$-f(a+rdx,\ a_1+r_1dy+dy)+f(a+rdx,\ a_1+r_1dy) = F(a+rdx,\ a_1+r_1dy).$$

6. Et dobbelt bestemt Integral kommer ikke altid til at angive en Sum af samme Beskaffenhed som dets sammensættende Elementer, naar $F(x,y)$ ikke er endelig for alle Værdier af x og y imellem Grændserne for deres Værdier. Naar man til Exempel har $F(x,y)=\dfrac{1}{xy}$, altsaa uendelig for $x=0$, $y=0$, og

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\frac{dx\,dy}{xy}=\int_{-}^{0}\int_{-1}^{0}\frac{dx\,dy}{xy}+\int_{-1}^{0}\int_{0}^{+1}\frac{dx\,dy}{xy}+\int_{0}^{+1}\int_{-1}^{0}\frac{dx\,dy}{xy}+\int_{0}^{+1}\int_{0}^{+1}\frac{dx\,dy}{xy},$$

vil den förste og sidste Gruppe indeholde lutter positive Elementer, i numerisk Værdi de samme som de negative der indeholdes i anden og tredie; hele Summen skulde da antages at blive 0, men ved Integrationen bliver den negativ, nemlig

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\frac{dx\,dy}{xy}=-\pi^2.$$

Dette hidrörer fra det Imaginære i Elementerne

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{dx}{x}=-\pi\sqrt{-1},\quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{dy}{y}=-\pi\sqrt{-1},\qquad \left(\varepsilon=\frac{1}{\infty}\right)$$

som i det sammensatte Element

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{dx\,dy}{xy}=-\pi^2$$

maa give negativt Product. Saadanne dobbelte Integraler, hvis Intervaller ere uendelig smaa, kaldes *dobbelte singulære* og ville i alle Tilfælde være identiske med eet Element og altsaa altid blive 0, undtagen naar $F(x, y)$ er uendelig i Intervallet, da det singulære kan ophöre at være 0 og Principet i 5 ophöre at gjælde.

I nogle Tilfælde lade de dobbelte singulære Integraler sig ligefrem bestemme ved de enkelte. Saaledes naar X og Y ere givne Functioner respective af x og y og

$$\int X dx = X_1,\qquad \int Y dy = Y_1,$$

saa vil man med Udeladelse af de arbitrære Functioner have

$$\int\int XY dx\,dy = X_1 Y_1,$$

og fölgelig, idet A og B, A_1 og B_1 ere de Værdier respective X og Y antage, den förste for $x=a$ og $x=b$, den sidste for $y=a_1$ og $y=b_1$, er

$$\int_a^b\int_{a_1}^{b_1} XY dx\,dy = (B-A)(B_1-A_1)=\int_a^b X dx\,.\int_{a_1}^{b_1} Y dy.$$

Det dobbelte bestemte Integral er altsaa Productet af to enkelte, hvilket ogsaa gjælder for singulære.

Paa lignende Maade har man

$$\int\int (X+Y)\,dx\,dy = X_1 y + Y_1 x$$

og

$$\int_a^b\int_{a_1}^{b_1}(X+Y)dx\,dy=(B-A)(b_1-a_1)+(B_1-A_1)(b-a)=(b_1-a_1)\int_a^b Xdx+(b-a)\int_{a_1}^{b_1}Ydy.$$

Som Exempler paa Fremgangsmaaden i andre Tilfælde af singulære Integraler kunne mærkes fölgende. Man har

$$\int_{-m}^{+m}\int_{-n}^{+n}\frac{dx\,dy}{(x+y)^a}=\frac{1}{(a-1)(a-2)}(1+(-1)^{a-2})\left[\frac{1}{(m+n)^{a-2}}-\frac{1}{(m-n)^{a-2}}\right],\ \text{(A)}$$

hvori indeholdes flere singulære Integraler, svarende til uendelige Differentialer, idet man nemlig ved förste Integration, for Ex. med Hensyn til y, kommer til at bestemme Summen af flere Elementer, hvoriblandt de blive uendelige som svare til $y=-x$. Dette vil i Almindelighed være 3 Gange Tilfældet, nemlig naar $y=0$, $x=0$, og, hvis $m>n$, naar $y=\pm n$, $x=\mp n$, men, hvis $m<n$, naar $y=\pm m$, $x=\mp m$. Disse singulære Integraler ville være indeholdte i

$$\left.\begin{aligned}\int_{-n}^{+n}\int_{-x-\varepsilon}^{-x+\varepsilon}\frac{dx\,dy}{(x+y)^a}&=-\int_{-n}^{+n}\frac{dx}{a-1}\left[\frac{1}{\varepsilon^{a-1}}-\frac{1}{(-\varepsilon)^{a-1}}\right],\ \text{hvis } m>n\\ \int_{-m}^{+m}\int_{-y-\varepsilon_1}^{-y+\varepsilon_1}\frac{dy\,dx}{(x+y)^a}&=-\int_{-m}^{+m}\frac{dy}{a-1}\left[\frac{1}{\varepsilon_1^{a-1}}-\frac{1}{(-\varepsilon_1)^{a-1}}\right],\ \text{hvis } m<n\end{aligned}\right\}\ \text{(B)}$$

idet man i Tilfældet $m<n$ foretager förest Integrationen med Hensyn til x. Hvis $m=n$, falde de to Formler (B) sammen.

Antages a ulige >1, har man ifölge (A) og (B)

$$\int_{-m}^{+m}\int_{-n}^{+n}\frac{dx\,dy}{(x+y)^a}=0,\ \int_{-n}^{+n}\int_{-x-\varepsilon}^{-x+\varepsilon}\frac{dx\,dy}{(x+y)^a}=0\ \ (m>n),\ \int_{-m}^{+m}\int_{-y-\varepsilon_1}^{y+\varepsilon_1}\frac{dy\,dx}{(x+y)^a}=0\ \ (m<n).$$

Her gjælder Principet i 5 ligefrem, idet Integralet er en Sum af Elementer der ere ligestore med modsat Fortegn. Elementet gjör tillige fuldstændig Overgang fra positivt til negativt igjennem ∞, naar x og y blive lige med modsat Tegn, medens det singulære Integral (B) bliver 0.

Er derimod a lige >2, har man ifölge (A)

$$\int_{-m}^{+m}\int_{-n}^{+n}\frac{dx\,dy}{(x+y)^a}=\frac{2}{(a-1)(a-2)}\left[\frac{1}{(m+n)^{a-2}}-\frac{1}{(m-n)^{a-2}}\right],$$

som er en negativ Sum, skjöndt man har lutter positive Elementer. Men til samme Tid giver (B)

$$\int_{-n}^{+n}\int_{-x-\varepsilon}^{-x+\varepsilon}\frac{dx\,dy}{(x+y)^a}=-\frac{4n}{(a-1)\varepsilon^{a-1}}=-\infty\ \ (m>n)$$

$$\int_{-m}^{+m}\int_{-y-\varepsilon_1}^{-y+\varepsilon_1}\frac{dy\,dx}{(x+y)^a}=-\frac{4m}{(a-1)\varepsilon_1^{a-1}}=-\infty\quad(m<n).$$

I dette Tilfælde gjöre Elementerne ingen Overgang for $y=-x$, men efterat have været ∞, komme de samme Værdier igjen i omvendt Orden; dog viser det singulære Integral en Tendens til Overgang til negativt, som derfor ved Integrationen gjör sig overvejende gjældende.

(A) og (B) ophöre at gjælde naar $a=2$ og $a=1$. I förste Tilfælde har man

$$\int_{-m}^{+m}\int_{-n}^{+n}\frac{dx\,dy}{(x+y)^2}=2l.\frac{\pm(m-n)}{m+n},$$

hvor man bruger överste eller nederste Fortegn eftersom $m \gtrless n$. Denne Sum er altid negativ, skjöndt Elementerne ere alle positive, men af

$$\int_{-n}^{+n}\int_{-x-\varepsilon}^{-x+\varepsilon}\frac{dx\,dy}{(x+y)^2}=-\int_{-n}^{+n}\frac{2dx}{\varepsilon}=-\infty\quad(m>n)$$

$$\int_{-m}^{+m}\int_{-y-\varepsilon_1}^{-y+\varepsilon_1}\frac{dy\,dx}{(x+y)^2}=-\int_{-m}^{+m}\frac{2dy}{\varepsilon_1}=-\infty\quad(m<n)$$

sees, at de singulære Integraler angive en begyndende Negativitet i Overgangsværdien ∞. Hvis $a=1$, faaer man

$$\int_{-m}^{+m}\int_{-n}^{+n}\frac{dx\,dy}{x+y}=-(m+n)\,l(-1)\pm(m-n)\,l(-1)=\begin{cases}-2\,nl(-1) & (m>n)\\ -2\,ml(-1) & (m<n)\end{cases}$$

Her ere Elementerne positive og negative numerisk lige, men Summen imaginær. Dette hidrörer fra de singulære Integraler, som indeholdes i

$$\int_{-n}^{+n}\int_{-x-\varepsilon}^{-x+\varepsilon}\frac{dx\,dy}{x+y}=-\int_{-n}^{+n}dx\,l(-1)=-2n\,l(-1)\quad(m>n),$$

$$\int_{-m}^{+m}\int_{-y-\varepsilon_1}^{-y+\varepsilon_1}\frac{dy\,dx}{x+y}=-\int_{-m}^{+m}dy\,l(-1)=-2m\,l(-1)\quad(m<n),$$

der vise hvorledes det Imaginære fremspirer i Overgangsformen ∞ af Differentialet, medens Integralet $(x+y)\,l(x+y)$ gjör Overgang fra reelt til imaginært gjennem 0, naar $x+y=0$.

Lignende Bemærkninger kunne gjöres med Hensyn til de 3 Integraler

$$\int_{\frac{\pi}{4}-m}^{\frac{\pi}{4}+m}\int_{\frac{\pi}{4}-m}^{\frac{\pi}{4}+m}\frac{dx\,dy}{\cos^2(x+y)}=-\infty,\quad \int_{\frac{\pi}{4}-m}^{\frac{\pi}{4}+m}\int_{\frac{\pi}{4}-m}^{\frac{\pi}{4}+m}\frac{\sin(x+y)\,dx\,dy}{\cos^2(x+y)}=-\infty,$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}-m}^{\frac{\pi}{4}+m}\int_{\frac{\pi}{4}-m}^{\frac{\pi}{4}+m}\frac{\sin(x+y)\,dx\,dy}{\cos^3(x+y)}=0,$$

hvortil höre de singulære

$$\int_{\frac{\pi}{4}-m}^{\frac{\pi}{4}+m}\int_{\frac{\pi}{2}-x-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-x+\varepsilon}\frac{dx\,dy}{\cos^2(x+y)}=\int_{\frac{\pi}{4}-m}^{\frac{\pi}{4}+m}dx\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right)=-\infty$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}-m}^{\frac{\pi}{4}+m}\int_{\frac{\pi}{2}-m-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-x+\varepsilon}\frac{\sin(x+y)\,dx\,dy}{\cos^2(x+y)}=\int_{\frac{\pi}{4}-m}^{\frac{\pi}{2}+m}dx\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)}-\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}\right)=-\infty$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}-m}^{\frac{\pi}{4}+m}\int_{\frac{\pi}{2}-x-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-x+\varepsilon}\frac{\sin(x+y)\,dx\,dy}{\cos^3(x+y)}=\int_{\frac{\pi}{4}-m}^{\frac{\pi}{4}+m}dx\left(\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)}-\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}\right)=0.$$

Ifölge det her Udviklede sees Formlen (1), saavelsom det i 5 fremsatte Princip bestandig at gjælde, blot med de Modificationer som ifölge det Uendeliges Natur maae gjöres*).

7. Ved Udförelse af Integrationerne faaes som bekjendt**)

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\frac{(y^2-x^2)}{(y^2+x^2)^2}\,dy\,dx=\pi,\quad \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}\,dx\,dy=-\pi$$

idet man har ladet Integrationen begynde i förste Tilfælde med Hensyn til x, i andet med Hensyn til y. Formlen (2) synes da ikke at være gyldig. Men tillige sees Differentialet at blive uendeligt for $x=0$, $y=0$, Værdier beliggende mellem Integralets Grændser. Havde man foretaget Integrationen uden Grændser eller med Grændser, der ikke indeslutte Værdier som gjöre Differentialet uendeligt, vilde Resultatet ikke være afhængigt af Integrationsordenen, da man altid med Udeladelse af de arbitrære Functioner vilde have

*) *Adolph Steen*, de vi et natura infiniti mathematici p. 26.
**) Ifölge *Cauchy*.

$$\iint \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2}\, dy\, dx = arc\left(tg = \frac{x}{y}\right) + C$$

$$\iint \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2}\, dx\, dy = -\, arc\left(tg = \frac{y}{x}\right) + C_1,$$

som stemme overeens, fordi

$$arc\left(tg = \frac{x}{y}\right) + arc\left(tg = \frac{y}{x}\right) = \frac{\pi}{2},$$

og

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_a^b \frac{y^2 - x^2}{(y^2+x^2)^2}\, dy\, dx = arc\left(tg = \frac{b}{b_1}\right) - arc\left(tg = \frac{a}{b_1}\right) - arc\left(tg = \frac{b}{a_1}\right) + arc\left(tg = \frac{a}{a_1}\right)$$

$$\int_a^b\int_{a_1}^{b_1} \frac{y^2 - x^2}{(y^2+x^2)_2}\, dx\, dy = -arc\left(tg = \frac{b_1}{b}\right) + arc\left(tg = \frac{a_1}{b}\right) + arc\left(tg = \frac{b_1}{a}\right) - arc\left(tg = \frac{a_1}{a}\right).$$

Naar $a = a_1$, $b = b_1$, blive begge disse 0.

Söger man det singulære Integral svarende til det uendelige Element, faaes

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{y^2 - x^2}{(y^2+x^2)^2}\, dx = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + y^2}, \quad \int_{-\varepsilon}^{+} \frac{y^2 - x^2}{(y^2+x^2)^2}\, dy = -\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2 + y^2},$$

altsaa Resultater af forskjelligt Fortegn, saa at det ikke er ligegyldigt om x eller y först sættes lig 0, hvilket ogsaa viser sig ved umiddelbar Substitution i Differentialet, der bliver $\pm\infty$, eftersom man först sætter $x = 0$ og derpaa $y = 0$ eller omvendt. Ovenstaaende singulære Integraler ere vel 0 for $\varepsilon = 0$, naar tillige i det förste $y \gtrless 0$, i det andet $x \gtrless 0$, men for $y = 0$ bliver det förste $+\infty$ og for $x = 0$ det andet $-\infty$. Altsaa faaer man to dobbelte singulære Integraler at betragte, nemlig

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{y^2 - x^2}{(y^2+x^2)^2}\, dy\, dx = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{2\varepsilon dy}{\varepsilon^2 + y^2} = \pi$$

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{y^2 - x^2}{(y^2+x^2)^2}\, dx\, dy = -\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{2\varepsilon dx}{\varepsilon^2 + x^2} = -\pi.$$

Alle de övrige Elementer ere saavel enkeltviis som tilsammentagne $= 0$. Grunden til det forskjellige Resultat maa atter söges i det Uendeliges Natur, som ikke tilsteder nogen Forskjel i Fortegn, da det Uendelige selv maa betragtes som Overgangsform mellem positivt og negativt, staaende udenfor begge. Men Fortegnet bliver ofte staaende i Formlerne for at antyde om det Uendelige er fremkommet ved en Overgang fra det Positive ($+\infty$) eller fra det Negative ($-\infty$). Tages ikke Hensyn til dette Fortegn hörer (2) ikke op at gjælde.

Lignende Bemærkninger kunne gjöres med Hensyn til Integralerne

$$\iint \frac{y^2-x^2}{(y^2\pm xy+x^2)^2}\,dy\,dx=\int \frac{x dy}{y^2\pm xy+x^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\,arc\left(tg=\frac{2y\pm x}{x\sqrt{3}}\right)+C,$$

$$\iint \frac{y^2-x^2}{(y^2\pm xy+x^2)^2}\,dx\,dy=-\int \frac{y dx}{y^2\pm xy+x^2}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\,arc\left(tg=\frac{2x\pm y}{y\sqrt{3}}\right)+C_1,$$

der stemme overeens, fordi

$$arc\left(tg=\frac{2y\pm x}{x\sqrt{3}}\right)+arc\left(tg=\frac{2x\pm y}{y\sqrt{3}}\right)=arc\left(tg=\mp\sqrt{3}\right)$$

Foretages derimod begge Integrationer mellem Grændserne $+1$ og -1, faaes respective $+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ og $-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Men man har ogsaa de singulære Integraler

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{y^2-x^2}{(y^2\pm xy+x^2)^2}\,dx=\frac{\varepsilon}{y^2\pm\varepsilon y+\varepsilon^2}+\frac{\varepsilon}{y^2\mp\varepsilon y+\varepsilon^2},$$

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{y^2-x^2}{(y^2\pm xy+x^2)^2}\,dy=-\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2\pm\varepsilon x+x^2}-\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2\mp\varepsilon x+x^2},$$

som ere 0 i alle Tilfælde for i förste $y \gtrless 0$, i sidste $x \gtrless 0$, men for $y=0$ bliver det förste ∞, for $x=0$ er det andet $-\infty$. Ved en ny Integration faaes

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{y^2-x^2}{(y^2\pm xy+x^2)^2}\,dy\,dx=\frac{2\pi}{\sqrt{3}},\quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{y^2-x^2}{(y^2\pm xy+x^2)^2}\,dx\,dy=-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Endnu kan mærkes fölgende Exempel.

$$\iint \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\,dx=-\int \frac{x dy}{(x+y)^2}=\frac{x}{x+y},\quad \iint \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\,dy=\int \frac{y dx}{(x+y)^2}=-\frac{y}{x+y}$$

ere overeensstemmende fordi

$$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x+y}=1.$$

Ved Integration mellem Grændser erholdes

$$\int_{-n}^{+n}\int_{-m}^{+m}\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\,dx=2\left(\frac{m}{m+n}-\frac{m}{m-n}\right)=\frac{-4mn}{m^2-n^2},$$

$$\int_{-m}^{+m}\int_{-n}^{+n}\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\,dy=-2\left(\frac{n}{m+n}-\frac{n}{m-n}\right)=\frac{4n^2}{m^2-n^2},$$

som for $m=n$ blive $\mp\infty$. De singulære Integraler

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx=-\left(\frac{\varepsilon}{(y+\varepsilon)^2}+\frac{\varepsilon}{(y-\varepsilon)^2}\right)=-\frac{2\varepsilon\,(y^2+\varepsilon^2)}{(y^2-\varepsilon^2)^2},$$

$$\int_{-\varepsilon_1}^{+\varepsilon_1}\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy=+\frac{\varepsilon_1}{(x+\varepsilon_1)}+\frac{\varepsilon_1}{(x-\varepsilon_1)^2}=\frac{2\varepsilon_1\,(x+\varepsilon_1{}^2)}{(x^2-\varepsilon_1{}^2)^2},$$

ere 0, naar foruden $\varepsilon=0$ haves i förste $y\gtrless 0$, i sidste $x\gtrless 0$; men $y=0$ gjör det förste, $x=0$ det andet uendeligt, men de faae modsatte Tegn. Det samme sees yderligere ved ny Integration, idet Integralerne

$$\int_{-\varepsilon_1}^{+\varepsilon_1}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\,dy=-\frac{4\varepsilon\varepsilon_1}{\varepsilon^2-\varepsilon_1{}^2},\quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\int_{-\varepsilon_1}^{+\varepsilon_1}\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\,dx=\frac{4\varepsilon_1{}^2}{\varepsilon^2-\varepsilon_1{}^2}$$

ere af modsat Tegn, og navnlig for $m=n$, $\varepsilon=\varepsilon_1$, $\mp\infty$.

Lignende Resultater synes at maatte faaes i alle Tilfælde, hvor det forelagte Differential ikke alene selv bliver uendeligt for visse Værdier af x og y mellem de givne Grændser, men tillige ved en förste Integration giver et singulært Integral som er $\pm\infty$, eftersom Integrationen er begyndt med Hensyn til den ene eller den anden Variable. I de forelagte Exempler kan tillige bemærkes den Særegenhed, at de to ubestemte Integraler som forekomme ved Integration i forskjellig Orden paa fölgende Maade ere forbundne

$$Y(x)+X(y)=C,$$

hvor C er en Constant og

$$\iint F(x,y)\,dy\,dx=Y(x),\quad \iint F(x,y)\,dx\,dy=-X(y),$$

idet $Y(x)$ og $X(y)$ ere to Functioner af x og y, af hvilke den ene reduceres til den anden ved de Variables Ombytning. I dette Tilfælde vil ogsaa

$$\int F(x,y)\,dx=\frac{d.\,Y(x)}{dy}=Y^1(x)$$

$$\int F(x,y)\,dy = -\frac{d.X(y)}{dx} = -X^1(y).$$

Man indseer tillige, at Differentialet af $Y(x)$ med Hensyn til y maae være sammensat af x og y paa samme Maade som Differentialet af $X(y)$ med Hensyn til x er sammensat af y og x, saa at altsaa de to förste Integraler $Y^1(x)$ og $-X^1(y)$ fremkomme af hinanden ved Ombytning af x og y og Forandring af Fortegn. Naar altsaa de singulære Integraler blive uendelige, maae de tillige faae forskjellige Fortegn og frembringe saaledes ogsaa en Forskjel i de endelige bestemte Integraler.